Présentation d'article :
Control categories and duality
Peter Selinger

Nguyễn Lê Thành Dũng (M1 MPRI, ENS Ulm)

14 février 2014

Aperçu

- Étendre la correspondance de Curry-Howard à la logique classique
- Calcul de termes de preuves classiques : le $\lambda\mu$-calcul de Parigot
  - Opérateurs de contrôle / continuations
- Interprétations calculatoires
  - Appel par nom / par valeur
- Résultat : la dualité de De Morgan échange CBN et CBV !
- Dualité révélée par une sémantique catégorique
- Interprétation catégorique la logique classique
  - Non dégénérée !

Plan

Section 1

Le $\lambda\mu$-calcul

Séquents à plusieurs conclusions

- Plusieurs formules à droite → logique classique
- $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_n$ signifie
  « A_1 *et* …*et* A_n entraîne B_1 *ou* …*ou* B_n »
- Tiers exclu en calcul des séquents LK :

$$\dfrac{\dfrac{A \;\vdash\; A}{\vdash\; \neg A, A}}{\vdash\; \neg A \vee A}$$

- Typage du $\lambda\mu$-calcul : déduction naturelle classique

Le $\lambda\mu$-calcul (Parigot, 1992)

- Termes :
  - $x, y, \ldots$: variables de termes
  - $\alpha, \beta, \ldots$: variables de contrôle
  - $M, N, \ldots ::= x \mid * \mid M\,N \mid \lambda x.M \mid [\alpha]M \mid \mu\alpha.M$
- Types du λ-calcul simplement typé avec $\bot$ et $\top$: $A, B, \ldots$
- Jugements de typage : $\Gamma \vdash M : A \mid \Delta$
  - $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$
  - $\Delta = \alpha_1 : B_1, \ldots, \alpha_m : B_m$

Sémantique informelle

- Variables de contrôle = continuations
- $\mu\alpha.M \approx \mathscr{C}\ (\lambda\alpha.M)$
- $[\alpha]M \approx$ `throw/cc` $\alpha\ M$
- $\mu\alpha.[\alpha]M \approx$ `call/cc` $(\lambda\alpha.M)$
- Pour $x : A, y : B \vdash M : C \mid \alpha : D, \beta : E$
  - x, y : entrées de M
  - Sortie principale de M de type C
  - α, β : sorties « exceptionnelles » de M

Règles de typage

$$(var)\ \frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A \mid \Delta} \qquad (*)\ \frac{}{\Gamma \vdash * : \top \mid \Delta}$$

$$(app)\ \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \mid \Delta \qquad \Gamma \vdash N : A \mid \Delta}{\Gamma \vdash MN : B \mid \Delta}$$

$$(abs)\ \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \lambda(x : A).M : A \to B \mid \Delta}$$

$$(name)\ \frac{\Gamma \vdash M : A \mid \alpha : A, \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha]M : \bot \mid \alpha : A, \Delta}$$

$$(\mu)\ \frac{\Gamma \vdash M : \bot \mid \alpha : A, \Delta}{\Gamma \vdash \mu(\alpha : A).M : A \mid \Delta}$$

Conjonction / type produit

- $A, B, \ldots ::= \ldots \mid A \wedge B$
- $M, N, \ldots ::= \ldots \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1\, M \mid \pi_2\, M$
- Règles usuelles de typage

$$(pair)\ \frac{\Gamma \vdash M : A \mid \Delta \qquad \Gamma \vdash N : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \wedge B \mid \Delta}$$

$$(\pi_1)\ \frac{\Gamma \vdash M : A \wedge B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \pi_1\, M : A \mid \Delta} \qquad (\pi_2)\ \frac{\Gamma \vdash M : A \wedge B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \pi_2\, M : B \mid \Delta}$$

Ajout de la disjonction au $\lambda\mu$-calcul

- $\vee$ intuitionniste : type somme
  - $\iota_1, \iota_2,$ `case` …
  - Pas la solution retenue
- $\vee$ classique : agit à droite du séquent
  - 2 sorties de types A et $B \approx$ 1 sortie de type $A \vee B$

Disjonction classique (Pym et Ritter, 1998)

- $A, B, \ldots ::= \ldots \mid A \vee B$
- $M, N, \ldots ::= \ldots \mid [\alpha, \beta]M \mid \mu(\alpha, \beta).M$
- Règles de typage à droite

$$(name')\ \frac{\Gamma \vdash M : A \vee B \mid \alpha : A, \beta : B, \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha, \beta]M : \bot \mid \alpha : A, \beta : B, \Delta}$$

$$(\mu')\ \frac{\Gamma \vdash M : \bot \mid \alpha : A, \beta : B, \Delta}{\Gamma \vdash \mu(\alpha, \beta).M : A \vee B \mid \Delta}$$

Tiers exclu en $\lambda\mu$-calcul

$$\mu(\alpha : A, \beta : \neg A).[\beta]\lambda x.[\alpha]x$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : A \vdash x : A \mid \alpha : A, \beta : \neg A}{x : A \vdash [\alpha]x : \bot \mid \alpha : A, \beta : \neg A}}{\vdash \lambda(x : A).[\alpha]x : \neg A \mid \alpha : A, \beta : \neg A}}{\vdash [\beta]\lambda(x : A).[\alpha]x : \bot \mid \alpha : A, \beta : \neg A}}{\vdash \mu(\alpha : A, \beta : \neg A).[\beta]\lambda(x : A).[\alpha]x : A \vee \neg A \mid}$$

Section 2

Sémantique par traduction CPS

Traduction CPS[1] : vue d'ensemble

- Définir la sémantique du $\lambda\mu$-calcul par traduction
  - $M \simeq N$ dans $\lambda\mu$ ssi $\mathrm{trad}(M) =_{\beta\eta} \mathrm{trad}(N)$
- Langage cible : λ-calcul simplement typé avec $+$ et $\times$
- On fixe un un type des *réponses* R
- 2 choix non équivalents :
  - Appel par valeur (CBV) : $M \rightsquigarrow \overline{M}$
  - Appel par nom (CBN) : $M \rightsquigarrow \underline{M}$ (Hoffman et Streicher, 1997)
- 2 notions d'équivalences
  - $M =_v N \Leftrightarrow \overline{M} =_{\beta\eta} \overline{N}$
  - $M =_n N \Leftrightarrow \underline{M} =_{\beta\eta} \underline{N}$

[1] *continuation-passing style*

Traduction des types en CBN

- On définit, pour A type de $\lambda\mu$:
  - K_A : type des *continuations* associé à A
  - C_A : type des *calculs* associé à A
- Par induction structurelle :

$$
\begin{aligned}
K_\top &= 0 \\
K_{A\wedge B} &= K_A + K_B \\
K_\perp &= 1 \\
K_{A\vee B} &= K_A \times K_B \\
K_{A\to B} &= C_A \times K_B \\
C_A &= K_A \to R
\end{aligned}
$$

Traduction des termes en CBN (1)

- Par induction structurelle :

$$
\begin{aligned}
\underline{x} &= \lambda(k : K_A).\ \tilde{x}\, k && (x : A)\\
\underline{M\ N} &= \lambda(k : K_B).\ \underline{M}\ \langle \underline{N}, k\rangle && (M : A \to B, N : A)\\
\underline{\lambda(x : A).\ M} &= \lambda(\langle \tilde{x}, k\rangle : K_{A\to B}).\ \underline{M}\, k && (M : B)\\
\underline{[\alpha]M} &= \lambda(k : 1).\ \underline{M}\ \tilde{\alpha} && (M : A, \alpha : A)\\
\underline{\mu(\alpha : A).\ M} &= \lambda(\tilde{\alpha} : K_A).\ \underline{M} * && (M : \bot)
\end{aligned}
$$

- Abréviation $\lambda\langle x, y\rangle.\ t = \lambda z.\ t\{x\backslash\pi_1 z\}\{y\backslash\pi_2 z\}$

Traduction des termes en CBN (2)

- Abr. $[t, u] = \texttt{function} \mid (\iota_1\ x) \Rightarrow t\ x \mid (\iota_2\ y) \Rightarrow u\ y$

$$\begin{aligned}
\underline{\langle M, N\rangle} &= \lambda(k : K_{A\wedge B}).\ \left[\underline{M}, \underline{N}\right]\ k && (M : A, N : B)\\
\underline{\pi_1\ M} &= \lambda(k : K_A).\ \underline{M}\ (\iota_1\ k) && (M : A \wedge B)\\
\underline{\pi_2\ M} &= \lambda(k : K_B).\ \underline{M}\ (\iota_2\ k) && (M : A \wedge B)\\
\underline{[\alpha, \beta]M} &= \lambda(k : 1).\ \underline{M}\ \langle\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\rangle && (M : A \vee B, \alpha : A, \beta : B)\\
\underline{\mu(\alpha : A, \beta : B).\ M} &= \lambda(\langle\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\rangle : K_{A\vee B}).\ \underline{M}\ * && (M : \bot)
\end{aligned}$$

Traduction des jugements de typage en CBN

Théorème (préservation du typage en CBN)

Si $x_1 : B_1, \dots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \dots, \alpha_m : A_m$, *alors*
$\tilde{x}_1 : C_{B_1}, \dots, \tilde{x}_n : C_{B_n}, \tilde{\alpha}_1 : K_{A_1}, \dots, \tilde{\alpha}_m : K_{A_m} \vdash \underline{M} : C_A$

- Traduction des jugements : $\underline{\Gamma \vdash M : A \mid \Delta}$

Traduction des types en CBV

- On définit, pour A type de $\lambda\mu$:
  - K_A : type des *continuations* associé à A
  - C_A : type des *calculs* associé à A
  - V_A : type des *valeurs* associé à A

$$
\begin{aligned}
V_\top &= 1 \\
V_{A\wedge B} &= V_A \times V_B \\
V_\bot &= 0 \\
V_{A\vee B} &= V_A + V_B \\
V_{A\to B} &= V_A \times K_B \to R \quad (\cong V_A \to C_B) \\
K_A &= V_A \to R \\
C_A &= K_A \to R
\end{aligned}
$$

Traduction des termes en CBV (1)

- Par induction structurelle :

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \lambda(k : K_A).\, k\, \tilde{x} && (x : A)\\
\overline{M\, N} &= \lambda(k : K_B).\, \overline{M}\, (\lambda m.\, \overline{N}\, (\lambda n.\, k\, \langle m, n\rangle)) && (M : A \to B, N : A)\\
\overline{\lambda(x : A).\, M} &= \lambda(\langle \tilde{x}, k\rangle : K_{A\to B}).\, k\, (\lambda\langle \tilde{x}, c\rangle.\, \overline{M}\, c) && (M : B)\\
\overline{[\alpha]M} &= \lambda(k : K_\perp).\, \overline{M}\, \tilde{\alpha} && (M : A, \alpha : A)\\
\overline{\mu(\alpha : A).\, M} &= \lambda(\tilde{\alpha} : K_A).\, \overline{M} * && (M : \perp)
\end{aligned}
$$

- Etc.

Traduction des jugements de typage en CBV

Théorème (préservation du typage en CBV)

Si $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_m : A_m$, *alors*
$\tilde{x}_1 : V_{B_1}, \ldots, \tilde{x}_n : V_{B_n}, \tilde{\alpha}_1 : K_{A_1}, \ldots, \tilde{\alpha}_m : K_{A_m} \vdash \overline{M} : C_A$

- Traduction des jugements : $\overline{\Gamma \vdash M : A \mid \Delta}$

Remarques sur l'image de la traduction

- Dans les termes élaborés, toutes les abstractions ont un type de la forme $A \to R$ (R type des réponses)
  - On peut se restreindre au fragment $\lambda^{R+\times}$ où $t, u, \ldots ::= \ldots \mid \lambda x.(t : R) \mid \ldots$
- En CBN, K_A et C_A sont de la forme $B \to R$
- En CBV, K_A et C_A sont de la forme $B \to R$, mais pas V_A

Section 3

De $\lambda^{R+\times}$ aux catégories de contrôle

Modèle catégorique de $\lambda^{R+\times}$

- Interprétation du λ-calcul avec $+$ et $\times$: catégories bicartésiennes closes
- Pour interpréter $\lambda^{R+\times}$, on a besoin de
  - $+$: coproduit
  - $\times$: produit
  - R : choix d'objet distingué
  - $\_ \to R$: exponentielle

Catégories de réponses

Définition

Une *catégorie de réponses* est une catégorie $\mathbf{C}$ admettant

- des produits finis
- des coproduits finis
- un *objet des réponses* $R \in \mathbf{C}$
- pour tout $A \in \mathbf{C}$, une exponentielle $A \Rightarrow R$ (ou R^A)

tels que

- $\times$ distribue sur $+$
- le morphisme canonique $A \to (A \Rightarrow R) \Rightarrow R$ soit un monomorphisme

- $\lambda^{R+\times}$ s'interprète naturellement dans une catégorie de réponses

Catégories de continuations

Définition

Soit **C** une catégorie de réponses. La *catégorie des continuations* de **C** est la sous-catégorie pleine dont les objets sont de la forme $A \Rightarrow R$. Elle est notée $R^{\mathbf{C}}$.

Théorème

Une catégorie de continuations est cartésienne close.

- $1 \cong R^0$
- $R^A \times R^B \cong R^{A+B}$
- $(R^B)^{R^A} \cong R^{B \times R^A}$

Structure prémonoïdale symétrique

Définition ($⅋$)

On définit sur $R^{\mathbf{C}}$ le connecteur $(A \Rightarrow R) ⅋ (B \Rightarrow R) \stackrel{\text{déf}}{=} (A \times B \Rightarrow R)$

- $A_1 \times \ldots \times A_n \Rightarrow R = (A_1 \Rightarrow R) ⅋ \ldots ⅋ (A_n \Rightarrow R)$
- $⅋$ est associatif et commutatif (à $\cong$ près)
- $R \cong 1 \Rightarrow R$ est un neutre, noté aussi $\bot$
- $A ⅋ (B \times C) \cong (A ⅋ B) \times (A ⅋ C)$
- structure *prémonoïdale* :
  - $(A \Rightarrow R) ⅋ (B \Rightarrow R) \cong B \Rightarrow (A \Rightarrow R)$: fonctoriel en $(A \Rightarrow R)$
  - $\_ ⅋ R^B$ et $R^A ⅋ \_$ endofoncteurs de $R^{\mathbf{C}}$
  - $\_ ⅋ \_$ n'est pas un bifoncteur

Quelques mots sur les catégories de contrôle

- Catégories de contrôle : axiomatisation « algébrique » des catégories de continuations
- Étudiées en profondeur dans l'article
- Catégorie $\mathbf{P}$ avec $1, \times, \bot, \parr$
- Axiomes :
  - $(\mathbf{P}, 1, \times)$ cartésienne close
  - $(\mathbf{P}, \bot, \parr)$ prémonoïdale symétrique
  - distributivité
  - autre condition technique (codiagonales)

Théorème de structure des catégories de contrôle

Théorème

Toute catégorie de continuations est une catégorie de contrôle.

- Vérification mécanique des axiomes

Théorème (de structure)

Toute catégorie de contrôle est équivalente à une catégorie de continuations.

- Gros résultat de l'article !
- Non traité ici

Structure co-close faible

- On pose $A \multimapinv B = (B \Rightarrow A) \Rightarrow \bot$
- Il existe *coapp* : $B \to (B \multimapinv A) \parr A$
- $\forall f : B \to C \parr A, \exists! \, cocurry(f) : (B \multimapinv A) \to C$ satisfaisant une propriété universelle

Catégories de co-contrôle

- Dual d'une catégorie de contrôle

Contrôle	Co-contrôle
1	0
$A \times B$	$A + B$
$\bot$	$\top$
$A \parr B$	$A \otimes B$
$B \multimapinv A$	$A \multimap B$

- Structure close faible sur une catégorie de co-contrôle :
  - $app : (A \multimap B) \otimes A \to B$
  - $curry(f) : C \to (A \multimap B)$

Section 4

Interprétation catégorique de $\lambda\mu$ et dualité

Interprétation de $\lambda\mu$ dans une catégorie

- $\mathbf{C}$ une catégorie de réponses
- On passe par l'interprétation « naturelle » de $\lambda^{R+\times}$, et par la traduction CPS en CBN
- $[\![\_]\!]$: jugements de typage $\rightarrow$ morphismes dans $\mathbf{C}$
- Rappel :

$$\frac{x_1 : B_1, \dots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \dots, \alpha_m : A_m}{\tilde{x}_1 : C_{B_1}, \dots, \tilde{x}_n : C_{B_n}, \tilde{\alpha}_1 : K_{A_1}, \dots, \tilde{\alpha}_m : K_{A_m} \vdash \underline{M} : C_A}$$

- $[\![\tilde{x}_1 : C_{B_1}, \dots, \tilde{x}_n : C_{B_n}, \tilde{\alpha}_1 : K_{A_1}, \dots, \tilde{\alpha}_m : K_{A_m} \vdash \underline{M} : C_A]\!]_{\lambda^{R+\times}} = \phi :$ $C_{B_1} \times \dots \times C_{B_n} \times K_{A_1} \times \dots \times K_{A_m} \rightarrow C_A$

Interprétation de $\lambda\mu$ (bis)

- Rappel : $C_A = (K_A \Rightarrow R)$
- On réécrit
  - $\phi : C_{B_1} \times \ldots \times C_{B_n} \times K_{A_1} \times \ldots \times K_{A_m} \to K_A \Rightarrow R$
  - en $\hat{\phi} : C_{B_1} \times \ldots \times C_{B_n} \to K_A \times K_{A_1} \times \ldots \times K_{A_m} \Rightarrow R$
- Rappel : $(A \Rightarrow R) \parr (B \Rightarrow R) = (A \times B \Rightarrow R)$
- $\hat{\phi} : C_{B_1} \times \ldots \times C_{B_n} \to C_A \parr C_{A_1} \parr \ldots \parr C_{A_m}$
- $[\![x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_m : A_m]\!] \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{\phi}$
- L'image de l'interprétation est dans $R^{\mathbf{C}}$!

Interprétation directe en CBN

- Définir directement la sémantique dénotationelle dans une catégorie de contrôle, sans passer par la traduction CPS
- $[\![x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_m : A_m]\!]_n$: $[\![B_1]\!]_n \times \ldots \times [\![B_n]\!]_n \to [\![A]\!]_n \parr [\![A_1]\!]_n \parr \ldots \parr [\![A_m]\!]_n$
- Interprétation des types :
  - $[\![\top]\!]_n = 1$
  - $[\![A \wedge B]\!]_n = [\![A]\!]_n \times [\![B]\!]_n$
  - $[\![A \to B]\!]_n = [\![A]\!]_n \Rightarrow [\![B]\!]_n$
  - $[\![\bot]\!]_n = \bot$
  - $[\![A \vee B]\!]_n = [\![A]\!]_n \parr [\![B]\!]_n$
- Interprétation des termes :
  - utiliser les morphismes structurels d'une catégorie de contrôle

Sémantique obtenue

Théorème

En appel par nom, l'interprétation directe du $\lambda\mu$-calcul dans $R^{\mathbf{C}}$ coïncide avec l'interprétation de la traduction CPS dans $\mathbf{C}$.

Théorème (correction et complétude de la sémantique)

$M =_n N$ *si et seulement si* $[\![M]\!]_n = [\![N]\!]_n$.

Interprétation CBV (par traduction CPS) (1)

- Rappel :

$$\frac{x_1 : B_1, \dots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \dots, \alpha_m : A_m}{\tilde{x}_1 : V_{B_1}, \dots, \tilde{x}_n : V_{B_n}, \tilde{\alpha}_1 : K_{A_1}, \dots, \tilde{\alpha}_m : K_{A_m} \vdash \overline{M} : C_A}$$

- $[\![\tilde{x}_1 : V_{B_1}, \dots, \tilde{x}_n : V_{B_n}, \tilde{\alpha}_1 : K_{A_1}, \dots, \tilde{\alpha}_m : K_{A_m} \vdash \underline{M} : C_A]\!]_{\lambda^{R+\times}} = \psi :$ $V_{B_1} \times \dots \times V_{B_n} \times K_{A_1} \times \dots \times K_{A_m} \to C_A$
- Remarques :
  - $K_A = V_A \Rightarrow R$ et $C_A = K_A \Rightarrow R$ sont dans $R^{\mathbf{C}}$
  - V_A n'est pas forcément dans $R^{\mathbf{C}}$!

Interprétation CBV (par traduction CPS) (2)

- On réécrit
  - $\psi : V_{B_1} \times \ldots \times V_{B_n} \times K_{A_1} \times \ldots \times K_{A_m} \to K_A \Rightarrow R$
  - en $\hat{\psi} : K_A \times K_{A_1} \times \ldots \times K_{A_m} \to V_{B_1} \times \ldots \times V_{B_n} \Rightarrow R$
- $\hat{\psi} : K_A \times K_{A_1} \times \ldots \times K_{A_m} \to K_{B_1} \parr \ldots \parr K_{B_n}$
- La flèche est dans le « mauvais sens »
  - On prend la catégorie duale !
- $\hat{\psi}^{\mathrm{op}} : K_{B_1} \otimes \ldots \otimes K_{B_n} \to K_A + K_{A_1} + \ldots + K_{A_m}$
- $[\![x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \ldots, \alpha_m : A_m]\!] \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{\psi}^{\mathrm{op}}$

Interprétation CBV (directe)

- Dans une catégorie de co-contrôle
- $[\![x_1 : B_1, \dots, x_n : B_n \vdash M : A \mid \alpha_1 : A_1, \dots, \alpha_m : A_m]\!]_v :$
  $[\![B_1]\!]_v \otimes \dots \otimes [\![B_n]\!]_v \to [\![A]\!]_v + [\![A_1]\!]_v + \dots + [\![A_m]\!]_v$
- Interprétation des types :
  - $[\![\top]\!]_v = \top$
  - $[\![A \wedge B]\!]_v = [\![A]\!]_v \otimes [\![B]\!]_v$
  - $[\![A \to B]\!]_v = [\![A]\!]_v \multimap [\![B]\!]_v$
  - $[\![\bot]\!]_v = 0$
  - $[\![A \vee B]\!]_v = [\![A]\!]_v + [\![B]\!]_v$
- Utilise la structure close faible
- Interprétation des termes :
  - utiliser les morphismes structurels d'une catégorie de co-contrôle

Sémantique obtenue

Théorème

En appel par valeur, l'interprétation directe du $\lambda\mu$-calcul dans $R^{\mathbf{C}}$ coïncide avec l'interprétation de la traduction CPS dans $\mathbf{C}$.

Théorème (correction et complétude de la sémantique)

$M =_N$ *si et seulement si* $[\![M]\!]_v = [\![N]\!]_v$.

Dualité CBN/CBV

- Dualité « syntax-free » entre catégories de contrôle et catégories de co-contrôle
  - Échange $\times$ et $+$, $\parr$ et $\otimes$
  - Parfaitement involutive
- Dualité syntaxique entre $\lambda\mu$-termes en CBN et $\lambda\mu$-termes en CBV
  - Sur les types : De Morgan ; involutive à isomorphisme de type près
  - Sur les termes : échange fonctionnel pur et effets de bord
- Passage sémantique $\rightarrow$ syntaxique : langages internes

Section 5

Bonus : pourquoi c'est prémonoïdal ?

Non-commutativité : exemple

- En appel par valeur, les 2 termes suivants sont différents :
  - let $x = M$ in let $y = N$ in P
  - let $y = N$ in let $x = M$ in P
- Problème quand M ou N produit un effet de bord
- Par contre, ils sont équivalents en appel par nom

Non-commutativité : version catégorique

- Dans une catégorie de co-contrôle, les 2 morphismes suivants sont différents
  - $[\![\Gamma]\!] \otimes [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!] \otimes [\![\Gamma]\!]} [\![A]\!] \otimes [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![A]\!] \otimes [\![N]\!]} [\![A]\!] \otimes [\![B]\!] = [\![A \wedge B]\!]_v$
  - $[\![\Gamma]\!] \otimes [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![\Gamma]\!] \otimes [\![N]\!]} [\![\Gamma]\!] \otimes [\![B]\!] \xrightarrow{[\![M]\!] \otimes [\![B]\!]} [\![A]\!] \otimes [\![B]\!] = [\![A \wedge B]\!]_v$
- $\otimes$ n'est pas bifonctoriel !
- Dans une catégorie de contrôle, $\times$ est bifonctoriel

Non-commutativité : exemple dual

- En appel par nom, les 2 termes suivants sont différents :
  - $\texttt{let } x = \mu\alpha.(\texttt{let } y = \mu\beta.P \texttt{ in } N) \texttt{ in } M$
  - $\texttt{let } y = \mu\beta.(\texttt{let } x = \mu\alpha.P \texttt{ in } M) \texttt{ in } N$
- $⅋$ n'est pas bifonctoriel

Et si ⅋ était bifonctoriel ?

Théorème

Une catégorie de contrôle dans laquelle ⅋ est bifonctoriel est une algèbre de Boole.

- La logique classique est dégénérée…